Solución caso Técnico

Febrero de 2009

1) En la Configuración A, la sonda completa inicia el viaje desde la Tierra, llega hasta el asteroide y regresa a la Tierra. Por tanto, la masa de la sonda a la llegada a la Tierra (suponiendo que haya gastado todo el combustible) será:

$$m_{Af} = m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + m_{tan}$$

La masa de la sonda al inicio de la misión será igual a esa masa *seca* (m_{Af}) más la masa del combustible necesario para las trayectorias de ida y vuelta (m_{prop})

$$m_{A0} = m_{Af} + m_{prop}$$

Podemos relacionar ambas masas a través de la ecuación del cohete.

$$\ln \frac{m_{Af} + m_{prop}}{m_{Af}} = \frac{\Delta V}{I_{sp} \cdot g}$$

Teniendo en cuenta que $m_{tan} = 0.15 m_{prop}$ y que $\Delta V = \Delta V_i + \Delta V_v$ tenemos:

$$\ln \frac{m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + 1.15 m_{prop}}{m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + 0.15 m_{prop}} = \frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}$$

Manipulando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + 1.15 m_{prop}}{m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + 0.15 m_{prop}} = e^{\frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}}$$

Si llamamos $m_{sc} = m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng}$, queda:

$$m_{sc} + 1.15 m_{prop} = (m_{sc} + 0.15 m_{prop})\, e^{\frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}}$$

$$1.15 m_{prop} - 0.15 m_{prop}\, e^{\frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}} = m_{sc} \left(e^{\frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}} - 1 \right)$$

Por lo que, despejando m_{prop} se obtiene:

$$m_{prop} = \frac{m_{sc} \left(e^{\frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}} - 1 \right)}{1.15 - 0.15 e^{\frac{\Delta V_i + \Delta V_v}{I_{sp} \cdot g}}}$$

en la que todo es conocido, por lo que podemos calcular m_{prop} y, por tanto, m_{A0}.

En la aplicación numérica se obtiene m_{prop}=701.8 kg y m_{A0}= 1757 kg.

En la Configuración B, la masa del módulo de regreso a la llegada a la Tierra es:

$$m_{B_f} = m_{SS} + m_{cap} + m_{eng} + m_{tan_v}$$

El combustible necesario para la trayectoria de regreso puede calcularse a través de una expresión análoga a la anterior, donde ahora $m_{sc_v} = m_{SS} + m_{cap} + m_{eng}$ y sólo tenemos que considerar el cambio de velocidad ΔV_{v} necesario para el regreso:

$$m_{prop_v} = \frac{m_{sc_v}\left(e^{\frac{\Delta V_v}{I_{sp}\cdot g}} - 1\right)}{1.15 - 0.15e^{\frac{\Delta V_v}{I_{sp}\cdot g}}}$$

Con los datos del problema, $m_{prop_v} = 123.8\ kg$.

Una vez en el asteroide y antes de separar el módulo de regreso, la masa de la sonda en la configuración B es:

$$m_{B_{ast}} = m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + m_{\tan_v} + m_{prop_v} + m_{sep} + m_{\tan_{\mathrm{i}}}$$

donde todo es conocido excepto por $m_{\tan_{\mathrm{i}}}$, que depende de m_{prop_i} . Análogamente, podemos calcular el combustible necesario para la trayectoria de ida a través de la ecuación del cohete. Si ahora llamamos

$$m_{sc_{ast}} = m_{SS} + m_{PL} + m_{cap} + m_{eng} + m_{tan_v} + m_{prop_v} + m_{sep}$$

podemos calcular m_{prop_i} :

$$m_{prop_i} = \frac{m_{sc_{ast}}\left(e^{\frac{\Delta V_i}{I_{sp}\cdot g}} - 1\right)}{1.15 - 0.15e^{\frac{\Delta V_i}{I_{sp}\cdot g}}}$$

En la aplicación numérica, $m_{prop_i} = 481.5\ kg$.

Ahora podemos calcular la masa inicial de la sonda en la configuración B.

$$m_{B_0} = m_{sc_{ast}} + m_{tan_{\mathrm{i}}} + m_{prop_{\mathrm{i}}}$$

Se obtiene, m_{B_0}=1671.3 kg. Por lo tanto, en este caso la configuración B es mejor.

2) Se pide:

1.1) A partir de la geometría del problema, reflejada en la Figura 1, se puede deducir que el ángulo máximo de giro de la antena para apuntar a la Tierra se da cuando la línea de vista desde el asteroide es tangente a la órbita de la Tierra. En cualquier otra geometría, el ángulo entre la línea de vista y la dirección al Sol es menor. El ángulo β de la siguiente figura puede calcularse a partir de R_{Tierra} y $R_{asteroide}$ que son, respectivamente, las distancias de la Tierra y el asteroide al Sol.

$$\beta = \sin^{-1}\frac{R_{Tierra}}{R_{asteroide}}$$

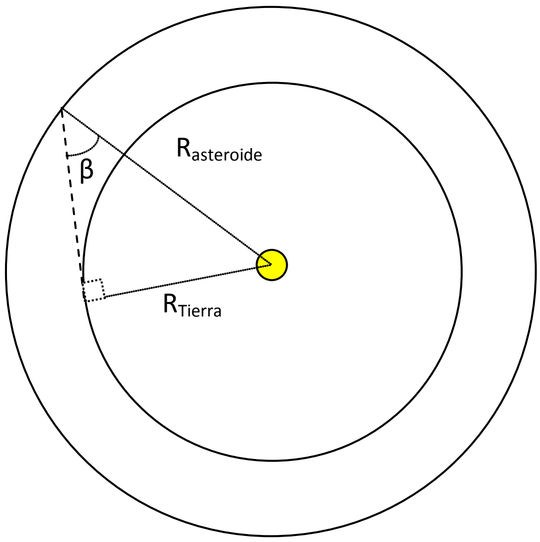
Para calcular R_{Tierra} y $R_{asteroide}$ usamos la fórmula que proporciona la velocidad orbital para obtener el período orbital *T*, a través, por ejemplo, de la frecuencia angular ω:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{{v_c}/{r}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mu}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

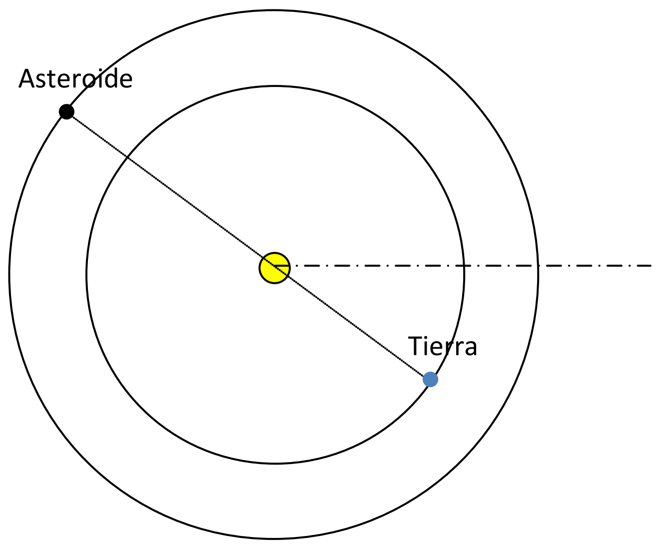
De donde obtenemos:

$$r = \sqrt[3]{\mu\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

Para la Tierra, con T=365.25 días, se obtiene R_{Tierra} =1.4960·10^8 km, mientras que para el asteroide, $R_{asteroide}$ = 2.0827·10^8 km. Por lo tanto, β = 45.9 deg, y el ángulo máximo que ha de girar la antena es ±45.9 deg.



1.2) En una conjunción solar superior se alinean en un momento dado la Tierra, el Sol y el asteroide (con el Sol en medio de los dos).



Para que esa geometría se repita, el ángulo girado por el asteroide alrededor del Sol debe ser igual al ángulo girado por la Tierra alrededor del Sol menos una revolución completa.

$$\alpha_{asteroide} = \alpha_{Tierra} - 2\pi$$

El ángulo girado por el asteroide en un tiempo *t* puede calcularse a través de la frecuencia angular *ω*, que es función del período *T*.

$$\alpha_{asteroide} = \frac{2\pi}{T_{asteroide}} t$$

Por tanto,

$$\frac{2\pi}{T_{asteroide}} t = \frac{2\pi}{T_{Tierra}} t - 2\pi$$

$$\left(\frac{1}{T_{Tierra}} - \frac{1}{T_{asteroide}}\right) t = 1$$

$$t = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_{Tierra}} - \frac{1}{T_{asteroide}}\right)}$$

El período de repetición de las conjunciones solares superiores es *t* = 933.5 días = 2.55 años.

1.3) En un sistema de telecomunicaciones, la potencia de la señal recibida depende de la potencia transmitida, las ganancias de las antenas de transmisión y recepción y las pérdidas, que tienen en cuenta la atenuación de la señal por distintas causas. Esta relación se conoce como la ecuación del *link budget*.

$$P_{Rx} = \frac{P_{Tx} G_{Tx} G_{Rx}}{L}$$

donde P_{Tx} y P_{Rx} son las potencias transmitidas y recibidas, G_{Tx} y G_{Rx} son las ganancias de las antenas y L son las pérdidas. En el caso de las misiones espaciales, la atenuación más importante de la señal se debe a la distancia que tiene que recorrer la señal, lo que se conoce como *free-space loss*. Esta pérdida es proporcional a la distancia que tiene que recorrer la señal al cuadrado. Para comprender esta relación, basta pensar en un transmisor situado en el centro de una esfera de radio *d*. La potencia emitida isotrópicamente se distribuye uniformemente por toda la superficie de la esfera, de manera que la potencia *W* que llega a una unidad de área es:

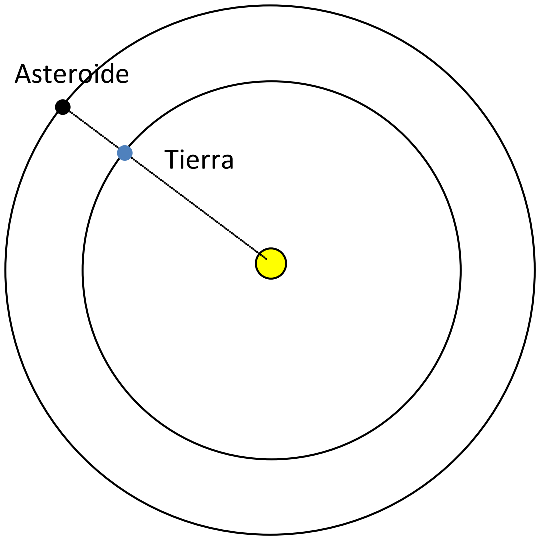
$$W = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Por tanto, el subsistema de telecomunicaciones tiene que diseñarse considerando el caso dimensionante, que es cuando la distancia entre la sonda y la Tierra es mayor. Durante la fase científica de la misión, la máxima distancia tiene lugar cuando se da la geometría del apartado anterior, es decir, cuando la Tierra y el asteroide se encuentran alineados con el Sol en medio. En ese caso, la distancia d_{max} es:

$$d_{max} = R_{Tierra} + R_{asteroide}$$

El subsistema de telecomunicaciones, por tanto, se diseñará para asegurar que, a esa distancia, se pueden enviar datos desde la sonda a una tasa de datos de 30 kbits/s y con el BER deseado. Para ello, se elegirán la potencia de transmisión, la ganancia de la antena, la frecuencia de las comunicaciones, la modulación de la señal, y el equipo necesario en Tierra para la recepción de las señales.

Con el sistema ya definido, la máxima tasa de datos posible corresponderá a la mínima distancia a la Tierra, que se da, de nuevo, cuando la Tierra, el asteroide y el Sol estén alineados, pero esta vez con la Tierra en medio, como se ve en la siguiente figura.



Por tanto,

$$d_{min} = R_{asteroide} - R_{Tierra}$$

La relación entre las potencias recibidas en estos dos casos (que es igual a la relación señal/ruido recibida si el sistema es el mismo) será:

$$\frac{P_{Rx\_dmin}}{P_{Rx\_dmax}} = \frac{L_{max}}{L_{min}} = \frac{{d_{max}}^2}{{d_{min}}^2} = \left(\frac{d_{max}}{d_{min}}\right)^2$$

Para hallar la tasa de datos máximos, usamos la otra relación que se proporciona en el enunciado: que el BER es directamente proporcional a la relación seña/ruido e inversamente proporcional a la tasa de datos.

Por tanto,

$$\frac{P_{Rx\_dmin}}{r_{dmin}} = \frac{P_{Rx\_dmax}}{r_{dmax}}$$

$$r_{dmin} = \frac{P_{Rx\_dmin}}{P_{Rx\_dmax}} r_{dmax} = \left(\frac{d_{max}}{d_{min}}\right)^2 r_{dmax}$$

En la aplicación numérica, la tasa de datos máxima, que corresponde a la distancia mínima r_{dmin} = 37.2 r_{dmax} , lo que significa que podríamos usar una tasa de datos de un 1.116 Mbits/s.